a

Działania na wyrażeniach algebraicznych

Skoro potrafimy wykonywać operacje arytmetyczne na liczbach, a liczby coraz częściej będą pojawiały się w postaci zmiennych literowych, warto nauczyć się wykonywać działania typu dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie i potęgowanie bezpośrednio na wyrażeniach algebraicznych. Cały temat, choć przydługi i toporny, stanowi konieczny trening przygotowujący do dalszej przygody w świecie matematyki.

Porządkowanie jednomianów

Intuicje

Z estetycznego punktu widzenia jednomiany powinno się zapisywać, zaczynając od współczynnika liczbowego, a następnie wypisując kolejne zmienne w kolejności alfabetycznej[[1]](#footnote-1). Dzięki potęgowaniu możemy uczynić jednomiany jeszcze przejrzystszymi: jeśli pewna zmienna występuje jako czynnik więcej niż jeden raz, nie piszemy jej dwukrotnie, a jedynie zwiększamy jej wykładnik.

Tak więc:

Na podobnej zasadzie działa mnożenie przez siebie dwóch jednomianów. Wyrażenia oraz stanowią odrębne wielomiany, ale gdy pomnożymy je przez siebie, możemy traktować jak jeden wielomian, który wymaga uporządkowania: .

Redukcja wyrazów podobnych

Intuicje

Oznaczmy przez wagę pojedynczego bochenka chleba. Gdy położymy na wadze elektronicznej dwa bochenki, wskaże ona masę równą . Gdy położymy na wadze jeszcze trzy bochenki, będziemy mieli 5 bochenków ledwo mieszczących się na wadze, która wskaże masę . Stąd prosty wniosek:

Sumując dwa jednomiany, uzyskaliśmy w wyniku inny jednomian. Dodawanie do siebie jednomianów mocno przypomina spostrzeżenia których dokonywaliśmy dawno temu, w temacie o dodawaniu liczb naturalnych:

Tak samo, jak intuicyjne jest dodawanie do siebie przedmiotów z naszego otoczenia, tak samo nie ma nic dziwnego w dodawaniu do siebie jednomianów. Jednomiany to „bohaterowie opowiadanej przez nas historii”, każdy z nich ma swój unikalny, odmienny charakter. Współczynniki jednomianów określają liczbę tych bohaterów. Gdy więc dodajemy jednomiany, które mają „ten sam charakter”, po prostu zwiększamy ich ilość.

Jak by nie patrzeć:

i nie ma absolutnie żadnego znaczenia, co właściwie reprezentują zmienne , i . Mogą one reprezentować Twoje najśmielsze pragnienia

* Wyobraźmy sobie kierowcę Stefana, zarabiającego na życie w firmie produkującej parówki. Stefan rozwozi parówki między Warszawą a Sosnowcem, miejscowościami które dzieli kilometrów. Ciężarówka Stefana pali litrów benzyny na jeden kilometr jazdy, zaś jeden litr paliwa kosztuje złotych. Wtedy cząstka jest bohaterem o imieniu „koszt jednokrotnego kursu między Warszawą a Sosnowcem”. Jeśli Stefan wyrobił 4 kursy w październiku, 10 kursów w grudniu i 6 kursów w styczniu, to łącznie musiał wydać złotych na paliwo.
* Jeśli w jednej klatce schodowej jest pięter, na jednym piętrze mieszkań, a w każdym mieszkaniu żyje średnio osób, to oznacza liczbę osób mieszkających w jednej klatce. Zliczając 4 klatki schodowe w budynku od strony wschodniej, 10 klatek w molochu od strony północnej i 6 klatek w bloku zachodnim otrzymamy ilość osób mieszkających w osiedlu „Pierwiosnek sześcienny”.

Jeśli w dwóch jednomianach występują dokładnie te same zmienne (w tej samej potędze), to jednomiany te opisują to samo zjawisko, „mają ten sam charakter” i możemy je do siebie dodać poprzez dodanie ich współczynników. Takie jednomiany nazywamy *wyrazami podobnymi.* Nie możemy jednak dodawać jednomianów, które mają różne zmienne lub różne wykładniki przy odpowiadających zmiennych. 5 gruszek + 3 jabłka to po prostu 5 gruszek + 3 jabłka, a nie jakieś 8 owoców.

Dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych

Intuicje

Dodawanie jednomianów i sum algebraicznych jest bardzo łatwe, sprowadza się do zredukowania wyrazów podobnych. Wyrażenie możemy potraktować jako jedną sumę algebraiczną, a jako drugą sumę algebraiczną. Ich dodanie stworzy nową sumę algebraiczną:

Więcej ostrożności należy poświęcić odejmowaniu wyrażeń algebraicznych. Rozważmy odejmowanie:

Odejmowanie, to zabieranie od tego, co po lewej, tego, co po prawej. Wprowadzamy „lewych” bohaterów na scenę:

A następnie zabijamy[[2]](#footnote-2) ich tylu, ilu zażyczył sobie reżyser „po prawej stronie”:

Nie powinno dziwić, że

Gdy odejmujemy sumy algebraiczne, właściwie odejmujemy od siebie poszczególne wyrazy podobne. Zastanówmy się nad trochę bardziej abstrakcyjnym przypadkiem:

Tym razem reżyser ma wyraźnie ma zły nastrój, gdyż chce zabić więcej aktorów, niż ma do dyspozycji. Możemy sobie wyobrazić, że obliczenia dotyczą finansów, a jednomiany , , , wyrażają pewne kwoty pieniężne. Odejmując od kwotę , stajemy się zadłużeni na , więc jesteśmy na minusie. Tak samo, skoro nie posiadamy żadnych „”, ale ktoś od nas chce aż , to mamy dług wielkości . Tak więc:

W ramach obliczeń wygodnie jest myśleć o odejmowaniu sumy jak o odejmowaniu poszczególnych składników:

W ten sposób możemy obliczać jeszcze bardziej skomplikowane różnice:

=

Wystarczy trzymać się reguły: minus stojący przed nawiasem odwraca znaki wszystkich składników wewnątrz. Zalecamy wielką ostrożność przy zdejmowaniu nawiasów z minusem. Zabawy z plusami i minusami są jednym z najczęstszych źródeł błędów rachunkowych, niezależnie od poziomu edukacji.

Mnożenie sum algebraicznych

Intuicje

Posłużmy się pewną wizualizacją. Gdy układamy kosteczki w równe rzędy i kolumny, ilość zużytych kosteczek wynosi

Jeśli ilość kafli w pionie oznaczymy literką , zaś ilość kafli w poziomie literką , będziemy mieli kafli.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Jeśli w pionie ułożymy kafli, zaś w poziomie kafli, zużyjemy kafli.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Z drugiej strony, dokonaliśmy podziału tabliczki na dwie części: jedna ma kafli wysokości i kafli szerokości (czyli zawiera kafli), druga ma kafli wysokości i kafli szerokości (czyli zawiera kafli). Okazuje się, że

Tak więc kiedy mnożymy cały nawias przez jakąś liczbę, mnożymy tak naprawdę każdy z jego składników osobno.

Możemy postąpić jeszcze dalej w tym szaleństwie: skonstruujmy tabelkę, która ma w pionie kafli, zaś w poziomie kafli.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Z jednej strony zużyliśmy kafli, z drugiej strony, licząc oddzielnie każdy z czterech obszarów, zużyliśmy kafli. Tak więc:

W ogólności, gdy mnożymy przez siebie dwa nawiasy zawierające sumy algebraiczne, mnożymy składniki „każdy z każdym”:

Potęgowanie wyrażeń algebraicznych

Intuicje

Podnoszenie do potęgi to nic innego jak wielokrotne mnożenie. Jakkolwiek żmudne i pracochłonne, podpina się pod schemat wymnażania nawiasów:

Ze względu na pracochłonność tych obliczeń, warto pamiętać tzw. *wzory skróconego mnożenia*, które mówią, w jaki sposób radzić sobie z potęgami w wyrażeniach algebraicznych. Dla drugiej potęgi wyróżniono trzy wzory skróconego mnożenia.

* Kwadrat sumy:
* Kwadrat różnicy:
* Różnica kwadratów:

Na pierwszy rzut oka trudno docenić wkład tych wzorów w nasze życie. Dumna nazwa „wzory skróconego mnożenia” to przecież nic innego niż wyniki kilku prostych rachunków:

Istotnie, pamiętanie każdego z tych wzorów pozwoli nam oszczędzić aż jednej linijki przekształceń. Miejmy jednak na uwadze, że w tak sformułowanych wzorach litery oraz mogą zastępować **dowolne** wartości liczbowe, w tym także dowolne wyrażenia algebraiczne, nie ważne jak bardzo złożone. Literki oraz możemy traktować jak okienka, w które wolno nam wstawić jakiekolwiek jajko-niespodziankę. Możemy więc walić na ślepo:

Cyniczniejsi z was wciąć mogą bagatelizować wagę tych wzorów. Dydaktycy jednak wiedzą, co robią, gdy tłuką je do głowy. Gdy będziemy zagłębiać się w coraz bardziej zaawansowaną algebrę, dobra znajomość tych wzorów okaże się bardzo przydatna do uzyskania biegłości w przekształceniach. Zachwalamy te wzory zasadniczo z trzech powodów:

* Pamiętając je, łatwiej podnosić nawiasy do kwadratu (mało istotne);
* Niewłaściwe podnoszenie sum i różnic do kwadratu jest jednym z najczęstszych błędów rachunkowych; wiele osób zapomina o wzorach skróconego mnożenia i wykonuje przekształcenia typu lub (bardziej istotne);
* Najtrudniejsza jest umiejętność wykorzystania tych wzorów od prawej strony równości do lewej. Niejednokrotnie będziemy musieli np. zauważyć, że można przedstawić jako . Bez dobrej znajomości wzoru na różnicę kwadratów takie przekształcenie jest bardzo nieoczywiste. Kształtujmy dobre odruchy! (bardzo istotne).

Istnieją podobne „wzory skróconego mnożenia” dla trzeciej potęgi:

* Sześcian sumy:
* Sześcian różnicy:
* Suma sześcianów:
* Różnica sześcianów:

Ich uzasadnienie również jest bardzo proste:

Zaś ich przydatność duża, choć może nie tak duża jak dla drugiej potęgi.

Rozszerzenie

Gdyby bardzo nam zależało, moglibyśmy stworzyć coś w rodzaju „wzorów skróconego mnożenia” dla dowolnie dużych potęg. Zajmijmy się najpierw podnoszeniem sumy do coraz wyższych potęg:

Jeśli nie wierzysz w któryś z powyższych wzorów, samodzielnie rozpisz go na kolanie. We wzorach na kolejne potęgi wyłania się nieprzypadkowa tendencja: gdy czytamy wzór od lewej do prawej, w każdym kolejnym jednomianie wykładnik zmiennej zmniejsza się o 1, a wykładnik zmiennej zwiększa się o 1. Współczynniki tych jednomianów także są nieprzypadkowe. Zapiszmy w kolejnych linijkach same współczynniki stojące przy kolejnych wyrazach:

Struktura ta, zwana *trójkątem Pascala*, zachowuje przyjemną właściwość: każda liczba jest sumą dwóch znajdujących się bezpośrednio powyżej. Na brzegach znajdują się jedynki.

Rozpisując w dół trójkąt Pascala, znaleźlibyśmy współczynniki dla coraz dalszych wzorów na potęgę sumy. Chwilowo możemy uznać to za magię matematyki. Czar pryśnie, gdy dotrzemy do tematu „Dwumian Newtona”.

Jeśli chodzi o wzory na potęgę różnicy, wyglądają one tak samo jak wzory na potęgę sumy, tylko co drugi wyraz jest na minusie:

Wynika to z dość prostej obserwacji: jeśli we wzorach na potęgę sumy wstawimy wszędzie w miejsce , okaże się, że minus zamieni się na plus przy wszystkich jednomianach, w których wykładnik jest parzysty; tak więc co drugi wyraz pozostanie ujemny, a co drugi dodatni.

Wzory na różnicę potęg także dają się uogólnić:

W ogólności:

Dowód

Wzory na sumę potęg dotyczą tylko wykładników nieparzystych:

W ogólności, dla nieparzystych:

Dowód

Wzory na sumę potęg parzystych nie istnieją.

Wyłączanie czynnika przed nawias

Intuicje

Wymnażanie nawiasów pozwala zamienić iloczyn na sumę algebraiczną. Zależnie od sytuacji, jedna z tych dwóch form okaże się bardziej użyteczna: czasem będziemy chcieli przedstawić wyrażenie jako sumę jednomianów, a czasem będziemy pożądali właśnie postaci zawierającej iloczyn kilku sum. Wymnażanie wyrażeń algebraicznych opanowaliśmy już wcześniej:

Wykonując przekształcenia w drugą stronę, dokonujemy wyłączenia czynnika przed nawias.

Aby wyłączyć czynnik przed nawias z zadanej sumy algebraicznej, musimy znaleźć czynnik powtarzający się we wszystkich składnikach. Weźmy sumę

Szukamy zmiennych, które pojawiają się w każdym jednomianie; jeśli dana zmienna występuje w różnych potęgach, wybieramy najmniejszy wykładnik i dolepiamy ją do wyłączanego czynnika. Zmienna powtarza się w każdym składniku w potęgach , i ; wybieramy najmniejszą potęgę () i wyłączamy tę cząstkę przed nawias:

W wyniku tej operacji każdy ze składników w nawiasie jest mniejszy razy (zmniejszamy wykładnik każdej zmiennej o 2). Zmienna pojawia się w kolejnych składnikach jako , i ; wyłączamy najmniejszą potęgę, czyli , zmniejszając każdy składnik -krotnie:

Wyczerpaliśmy powtarzające się zmienne, możemy jeszcze zająć się współczynnikami liczbowymi. Szukamy NWD wszystkich czynników, w tym przypadku , więc możemy wyłączyć trójkę przed nawias.

Tu nasza misja dobiega końca. Oczywiście

ponieważ wyłączanie czynnika nie może zmienić wartości wyrażenia, ma jedynie przedstawić je w innej formie. Dokonaliśmy najpełniejszego wyłączenia przed nawias – nie możemy w żaden sposób wzmocnić czynnika przed nawiasem, aby po wymnożeniu otrzymać wyjściową sumę. Mając wprawne oko, można dokonywać wyłączania czynnika za jednym zamachem:

Rozszerzenie

Uogólnieniem wyłączania czynnika przed nawias jest bardziej zaawansowana operacja: rozkład wyrażenia na czynniki. Czasami daną sumę algebraiczną można przedstawić w postaci iloczynu innych sum algebraicznych. Doświadczony matematyk mógłby zauważyć, że sumę

można przedstawić jako iloczyn

W tym przypadku czynnikiem wyłączonym przed nawias nie jest pojedynczy jednomian, ale suma jednomianów. Aby zauważyć takie przekształcenie, trzeba w pamięci wykonać kilka nieoczywistych manewrów:

Umiejętność rozbijania skomplikowanych sum na iloczyny jest niesamowicie przydatna m.in. do rozwiązywania równań wielomianowych (temat „Wielomiany”), jednak w praktyce bardzo ciężko wykonywać takie przekształcenia w pamięci.

Działania na ułamkach algebraicznych

Intuicje

Dodanie lub odjęcie dwóch ułamków wymaga sprowadzenia ich do wspólnego mianownika. Jeśli w mianownikach pojawiają się wyrażenia algebraiczne, najprościej uzyskać wspólny mianownik poprzez iloczyn wyjściowych mianowników. Gdy dodajemy / odejmujemy dwa ułamki, zawsze możemy rozszerzyć pierwszy ułamek przez mianownik drugiego oraz rozszerzyć drugi ułamek przez mianownik pierwszego:

W niektórych przypadkach warto dokonać rozszerzania nieco oszczędniej. Dla ułamków

Rozszerzanie obydwu przez sąsiednie mianowniki nie ma sensu. Wystarczy rozszerzyć drugi ułamek przez :

Gdyby rozszerzyć ułamki bardziej ordynarnie, musielibyśmy później dokonać wyłączenia czynnika przed nawias i skrócenia:

Ponownie zwracamy uwagę na niebezpieczeństwo odejmowania. Minus stojący przed ułamkiem dotyczy całego ułamka, a nie tylko pierwszego składnika w liczniku:

Mnożenie i dzielenie ułamków jest stosunkowo bardziej schematyczne. Aby pomnożyć ułamki, mnożymy ich liczniki i mianowniki. Dzielenie to mnożenie przez odwrotność.

1. I tak nikt o to nie dba [↑](#footnote-ref-1)
2. W wersji dla młodszych: odbieramy rolę w spektaklu [↑](#footnote-ref-2)